Opakování: vrstevnice funkce:

Třeba $F(x,y) = x^2 + 4y^2$ ...

vrstevnice jsou (pro libovolné $c \in \mathbb{R}$)

množiny tvaru

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = c\} =$$

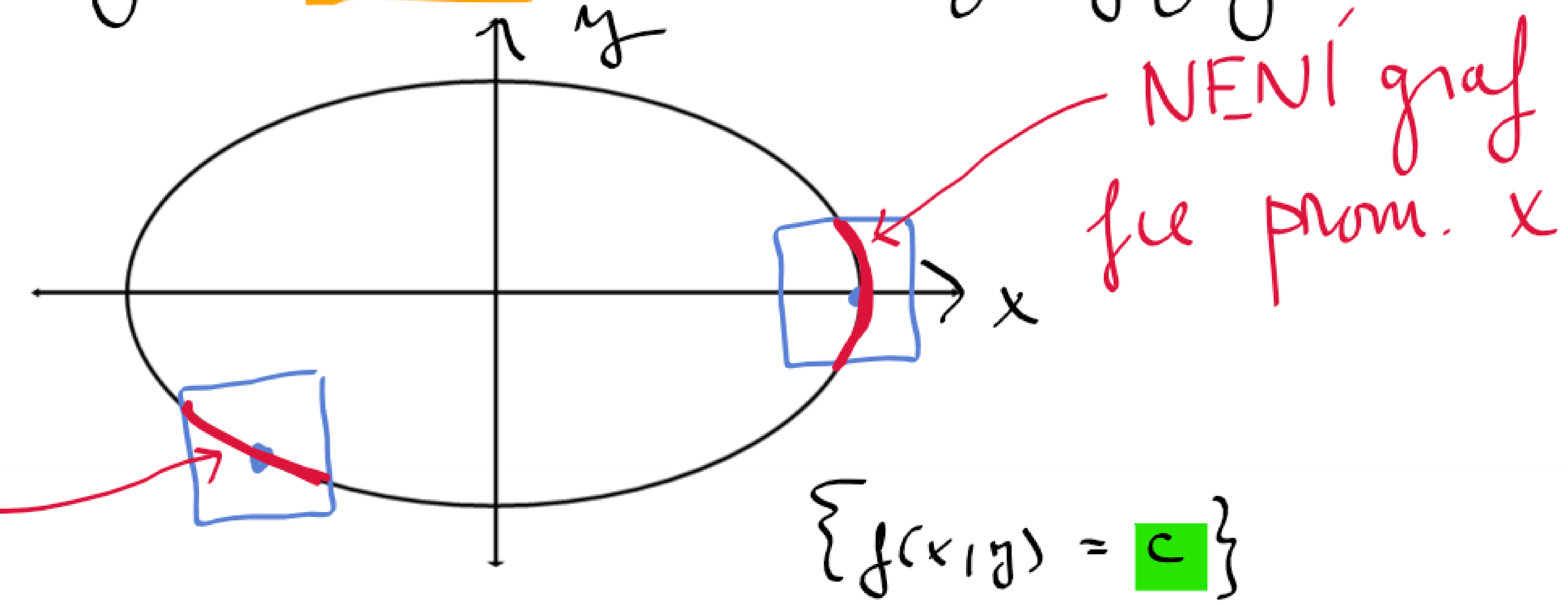
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = c\}.$$

Pro $c > 0$ jde o elipsu.

Pro „rozumné" fce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou vrstevnice „křivky". NE nutně grafy funkcí.

Lokálně:

často ANO.



Věta 69: (Věta o implicitní funkci – VIF)

Nechť $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je třídy C^1 (tj. má spojité všechny PD 1. řádu).

Značíme $x = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$, $y \in \mathbb{R}$,
$(x,y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^d$, takže
$F(x,y)$ znamená $F(x_1, \dots, x_{d-1}, y)$.

Nechť $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ a předpokládejme:

(i) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = c$ (ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak ex. otevřené U, V: $\tilde{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$, $\tilde{y} \in V \subseteq \mathbb{R}$

splňující: $\forall x \in U \ \exists!\, y \in V : F(x,y) = c$.

Označme toto $y =: g(x)$. Pak $g \in C^1(U)$

a platí: $\forall x \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Věta 69: (Věta o implicitní funkci – VIF)

Nechť $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je třídy C^1 (tj. má spojité všechny PD 1. řádu).

Značíme $x = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$, $y \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^d$, takže $F(x,y)$ znamená $F(x_1, \dots, x_{d-1}, y)$.

Nechť $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ a předpokládejme:

(i) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = \boxed{c}$ (ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak ex. otevřené U, V: $\tilde{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$, $\tilde{y} \in V \subseteq \mathbb{R}$ splňující: $\forall x \in U \ \exists! y \in V : F(x,y) = \boxed{c}$.

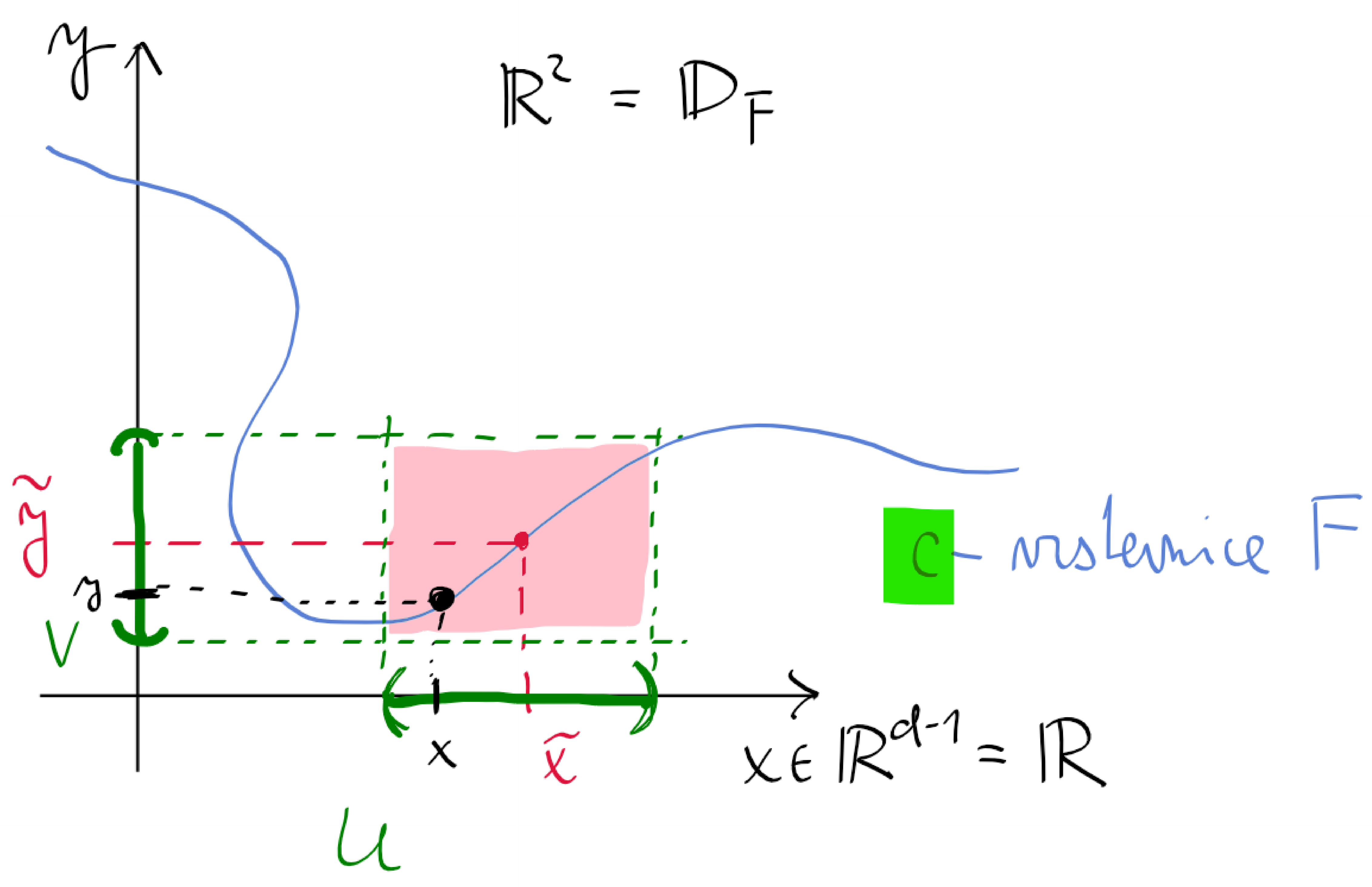
Označme toto $y =: g(x)$. Pak $g \in C^1(U)$ a platí: $\forall x \in U$ ($j \in \{1, \dots, d-1\}$):

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Vysvětlení: Pro $d=2$, takže $x \in \mathbb{R}$ a $F(x,y)$ je fce 2 proměnných $x, y \in \mathbb{R}$.

Mějme bod $(\tilde{x}, \tilde{y})$ na $\boxed{c}$-vrstevnici F. (Tj. $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = \boxed{c}$.)

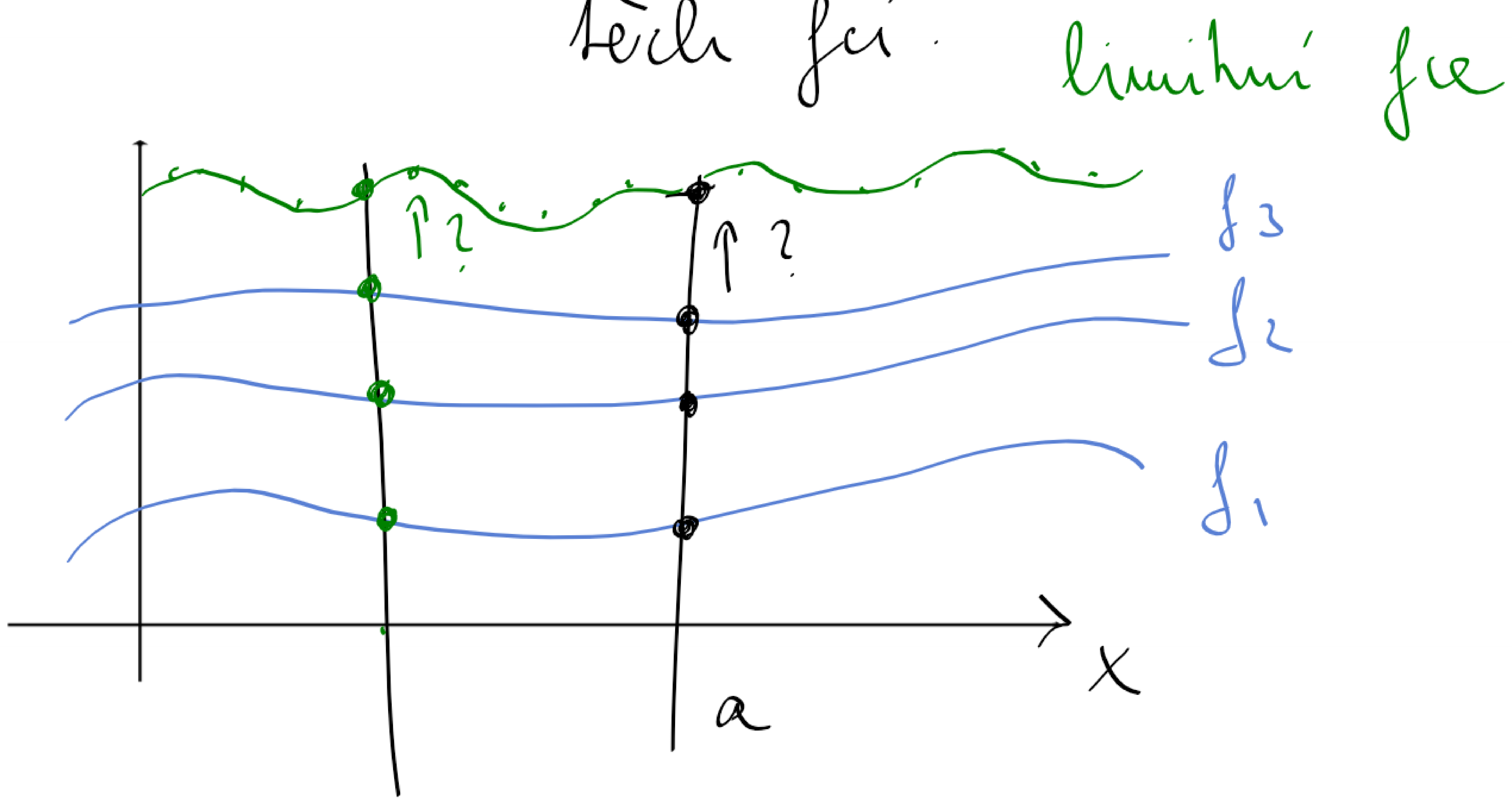
Tuto vrstevnici chceme „lokálně“ popsat jako graf funkce $y = f(x)$.



POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

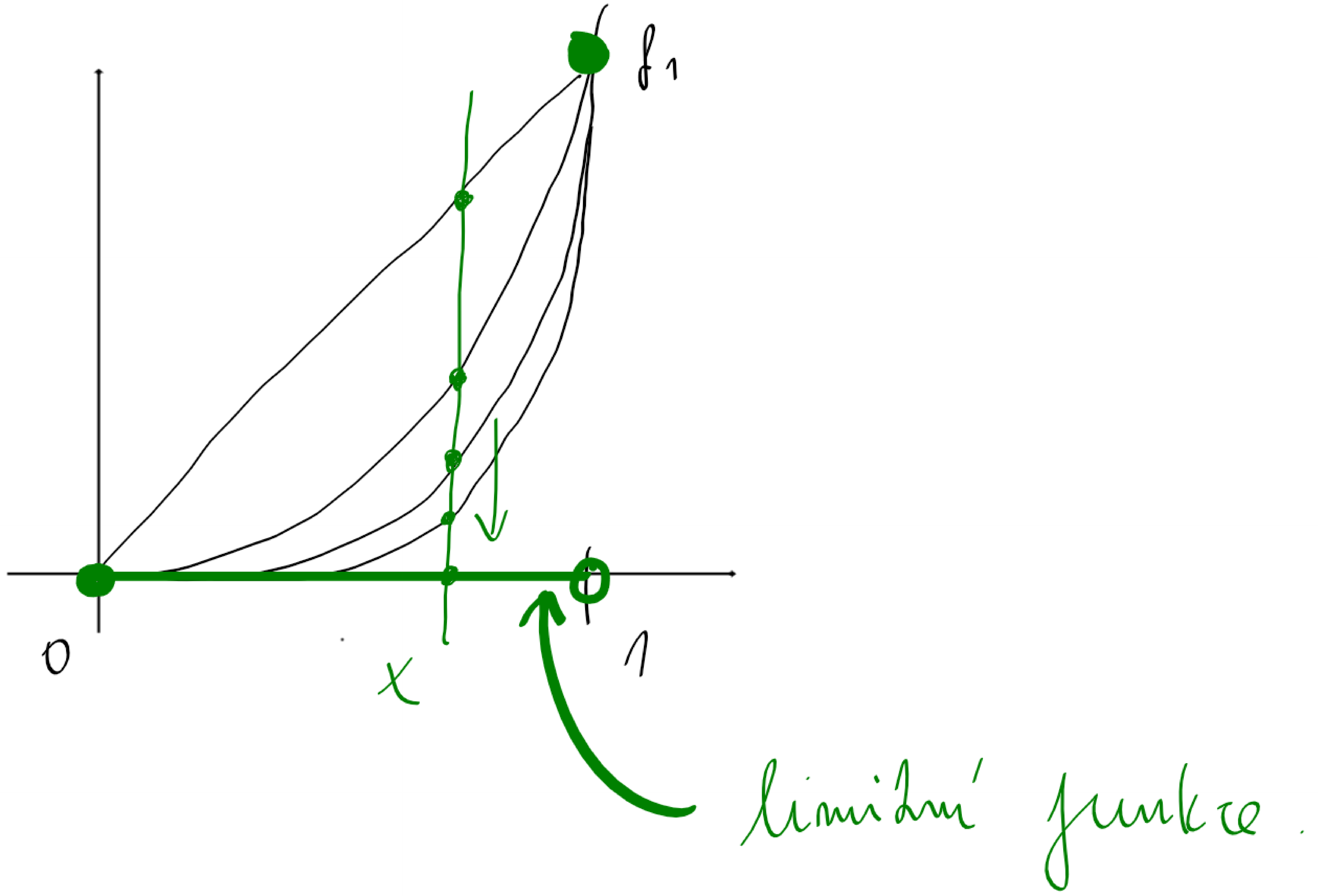
Posloupnost funkcí je formálně vzato zobrazení $\mathbb{N} \to \{ f : f \text{ je funkce}, D_f \subseteq \mathbb{R} \}$.

Řady funkcí ⤳ posloupnosti částečných součtů těch fcí.



$f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, $x \in (0,1)$



[Zde $f_n \to 0$ na $(0,1)$. – viz Definici 70.]

Definujme $f : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Platí $f_n \to f$ na $[0,1]$.

MOTIVACE: Záměna limitních procesů

Příklad: Víme $\forall x \in (-1,1)$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad / (\cdot)'$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$$

Kdyby tato suma byla konečná, víme, co dělat, neboť „derivace součtu je součet derivací":

$$\left(\sum_{n=0}^{N} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{N} (x^n)' = \sum_{n=0}^{N} n x^{n-1}$$

OTÁZKA: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \ldots$

Obecně: Záměna lim. procesů zachovává rovnost? Kdy ANO / NE?

Příklad: $\log(1+x)$ … Taylorova řada?

Analogický Př.: $\operatorname{arctg} x$

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n, \quad x \in (-1,1)$$

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right) dx \quad / \int (\ldots)\,dx$$

$\Downarrow$?

$$\log(1+x) + C = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-x)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(dosaď $x=0$) $\Rightarrow C=0$

[Ale $\int (-x)^n\,dx = (-1)^n \int x^n\,dx \overset{c}{=} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$]

Definice 70: (Bodová konvergence posl. fcí)

Buďte f_n $(n \in \mathbb{N})$, f funkce a nechť $M \subseteq D_{f_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq D_f$.
Řekneme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově k funkci f na M, jestliže

$$\forall x \in M: \quad f_n(x) \to f(x).$$

[Píšeme prostě $f_n \to f$ na M.]

Poznámka 71: (Zachovávání vlastností)

Z příkladu dříve je zřejmé, že bodová limita posl. spojitých fcí nemusí být spojitá.

Otázka: $\forall n$: f_n má vlastnost ♡ na M a $f_n \to f$ na M

$$\overset{?}{\Longrightarrow}$$

f má vlastnost ♡ na M.

♡ ... spojitost: NE (viz příklad dříve)

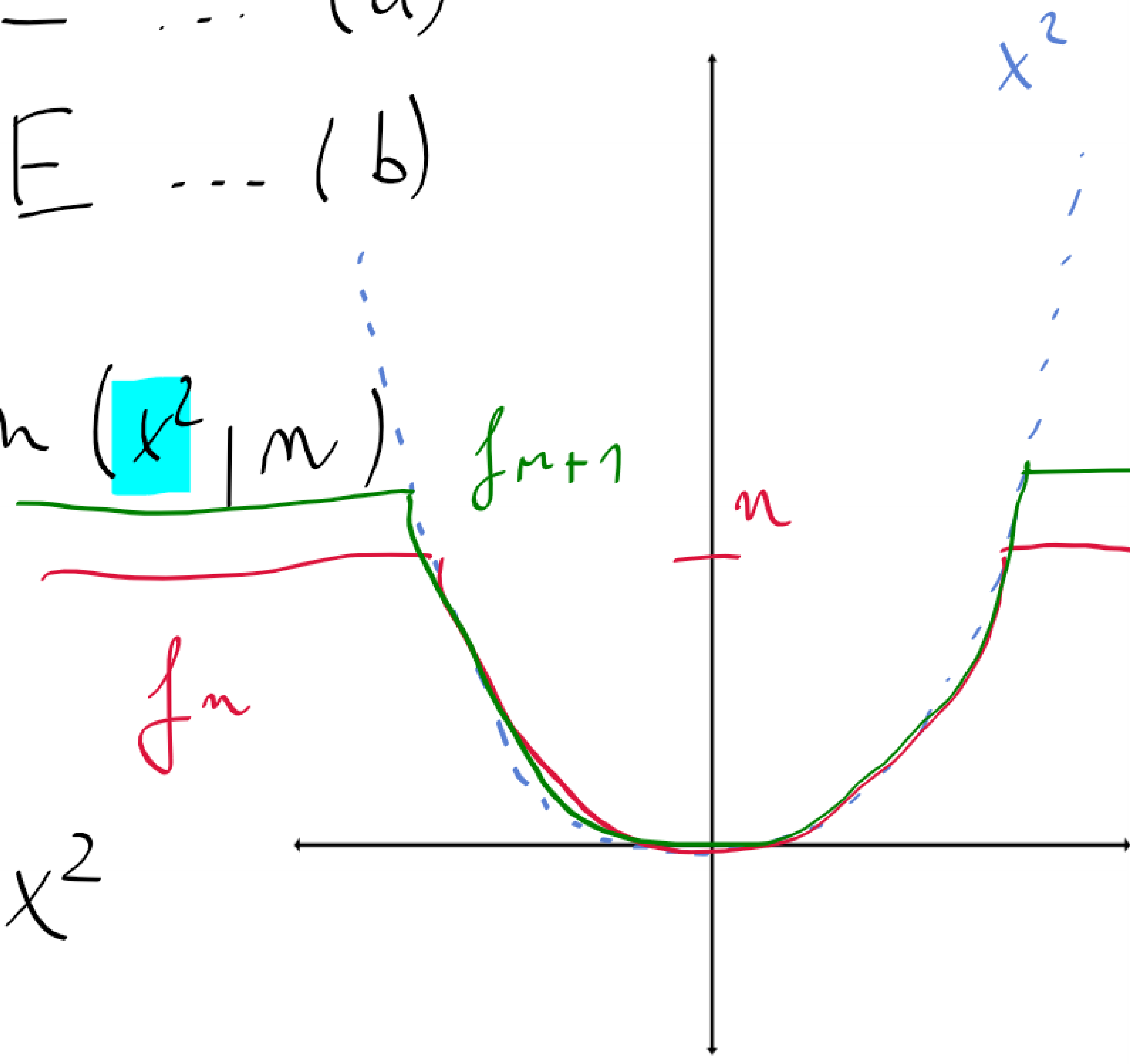
♡ ... omezenost: NE ... (a)

♡ ... neomezenost: NE ... (b)

Ad a): $f_n(x) := \min(x^2, n)$

Snadno vidíme, že

$$\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2$$



$f_n(x) = \min(x^2, n)$.

<u>Chci:</u> $\forall a \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = a^2$

Buď dáno $a \in \mathbb{R}$ pevné.

Pak najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > a^2$.

Pak $\forall n \geq n_0$: $n \geq n_0 > a^2$, a tedy

$$f_n(a) = \min(n, a^2) = a^2, \quad n \geq n_0$$

Tedy posloupnost $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ je od toho n_0 jistě konstantní s hodnotou a^2.

Tj. $\lim f_n(a) = a^2$.

Tedy limitní funkce je $f(x) = x^2$.

$$f_n \longrightarrow f \text{ na } \mathbb{R}.$$

Ale $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n je omezená & f je neomezená.

<u>TZN.:</u> Omezenost se nezach. bodovou limitou.

<u>Cvičení:</u> Příklad: „neomezenost se nezachovává".

♡... nekles. : ANO

♡... konečné : ANO.

Definice 72: (Stejnoměrná konvergence)

Buďte f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ funkce definované aspoň na množině M.

Řekneme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall x \in M \; \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Píšeme: $[f_n \rightrightarrows f$ na $M]$.

(Pokud $D_{f_n} = D_f = M$, stačí $f_n \rightrightarrows f$.)

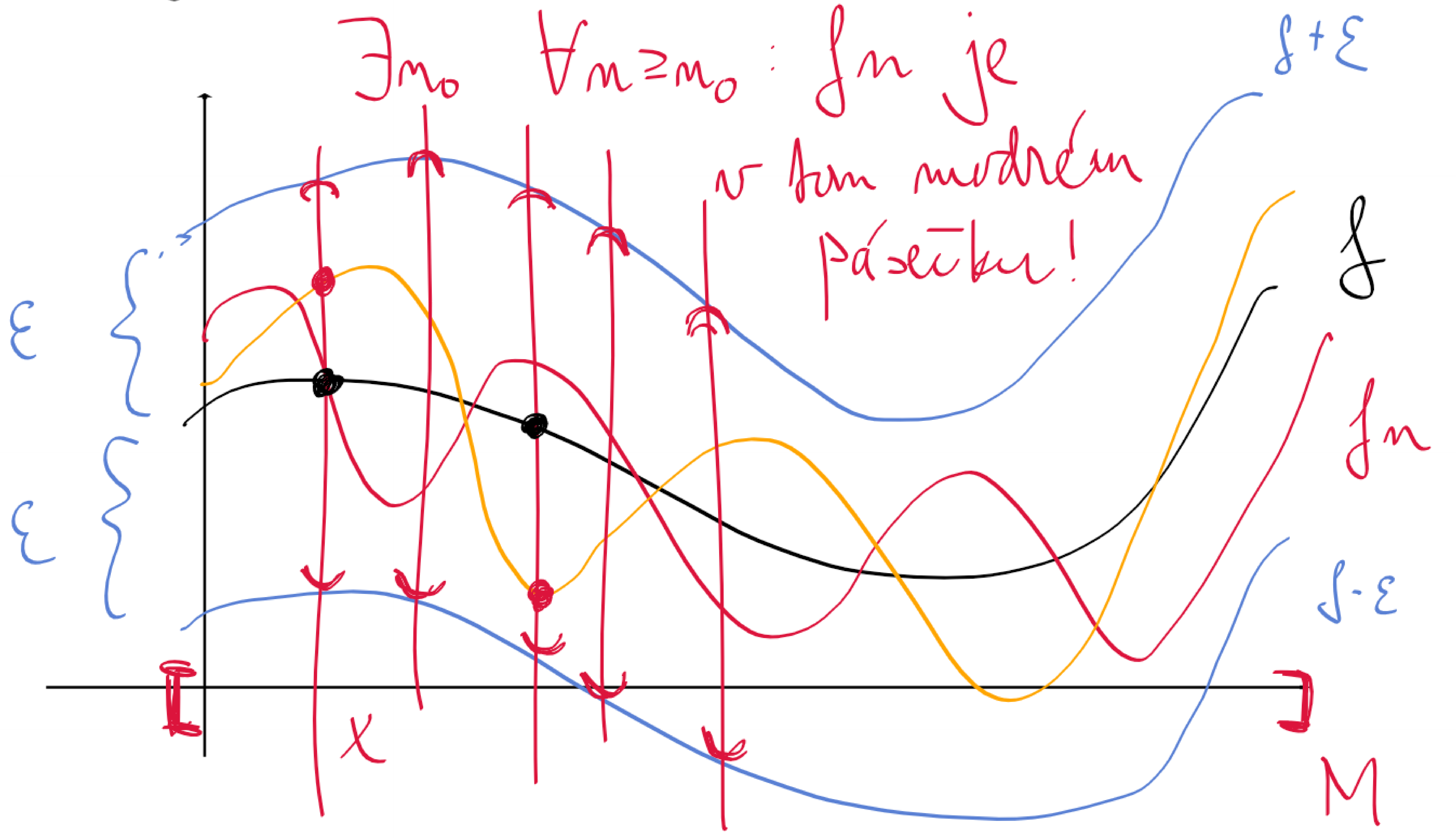
Poznámka 73: • Porovnejme s def. 70:

$f_n \to f$ na M $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in M$: $\lim f_n(x) = f(x)$ $\overset{\text{def. lim 1. SEM.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in M$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

• Z pořadí kvantifikátorů je ihned patrné, že $(f_n \rightrightarrows f$ na $M) \Rightarrow (f_n \to f$ na $M)$

• Opačná implikace neplatí: Protipř. později

Co to je $f_n \rightrightarrows f$ na M:



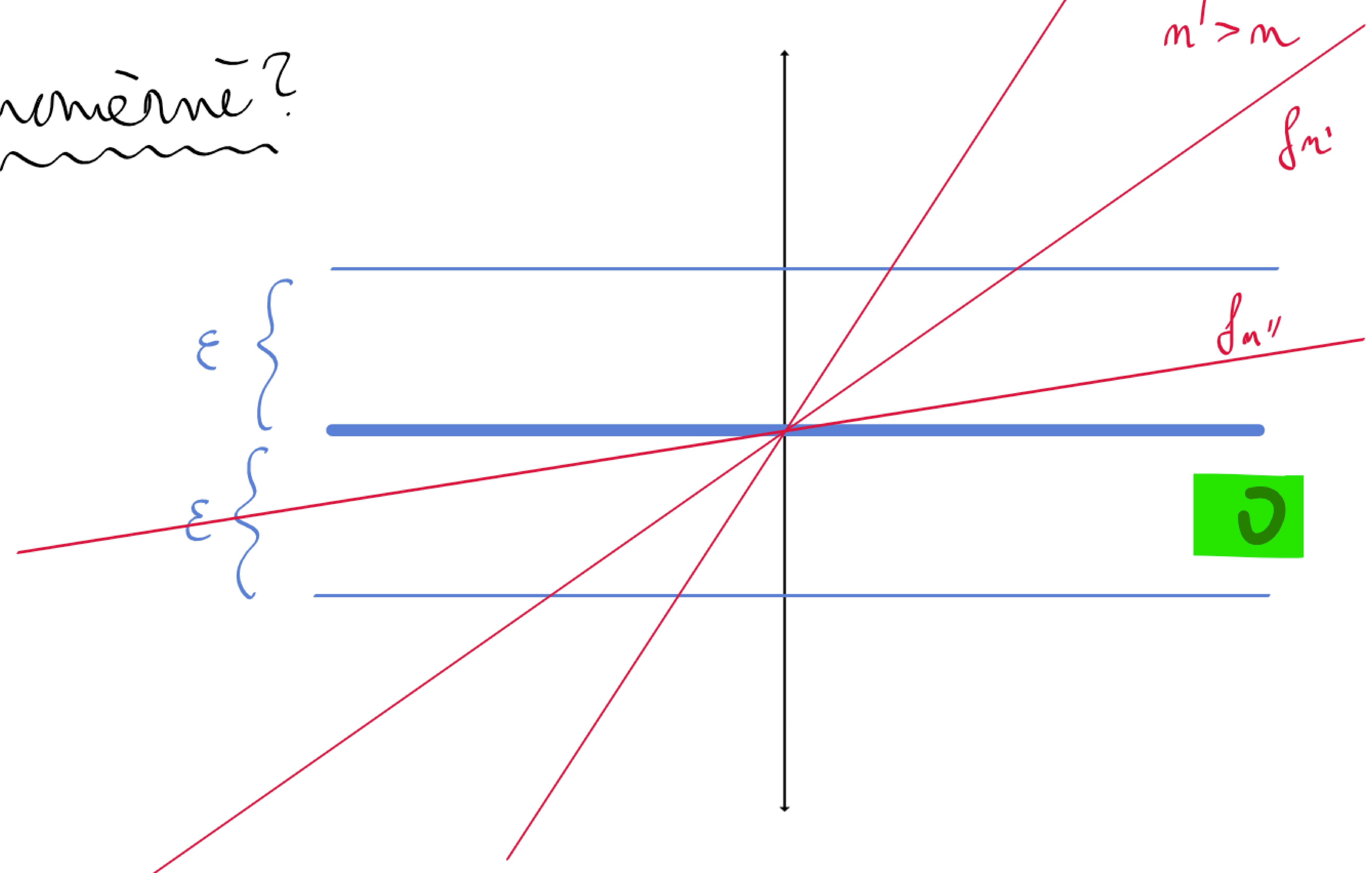
Příklad: $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Vyšetřete $\rightrightarrows$.

Bodová limita: $\forall x \in \mathbb{R}$: spočti limitu $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = \frac{x}{\infty} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy $f_n \longrightarrow 0$ na $\mathbb{R}$.

Stejnoměrně?



Je vidět, že dokonce pro žádné ε a žádné n: funkce f_n není obsažena v ε-pásu kolem limitní fce (0).

Jde tedy o případ, kdy

$$f_n \to 0, \quad \text{ale} \quad f_n \not\rightrightarrows 0 \quad (\text{na } \mathbb{R}).$$

Tj. vidíme, že $\longrightarrow$ a $\rightrightarrows$ nejsou ekviv

Lemma 73: ($O\ \sigma_n$) Buďte f_n, f $(n \in \mathbb{N})$ def. aspoň na $M \neq \emptyset$.

Označme $\sigma_n := \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$.

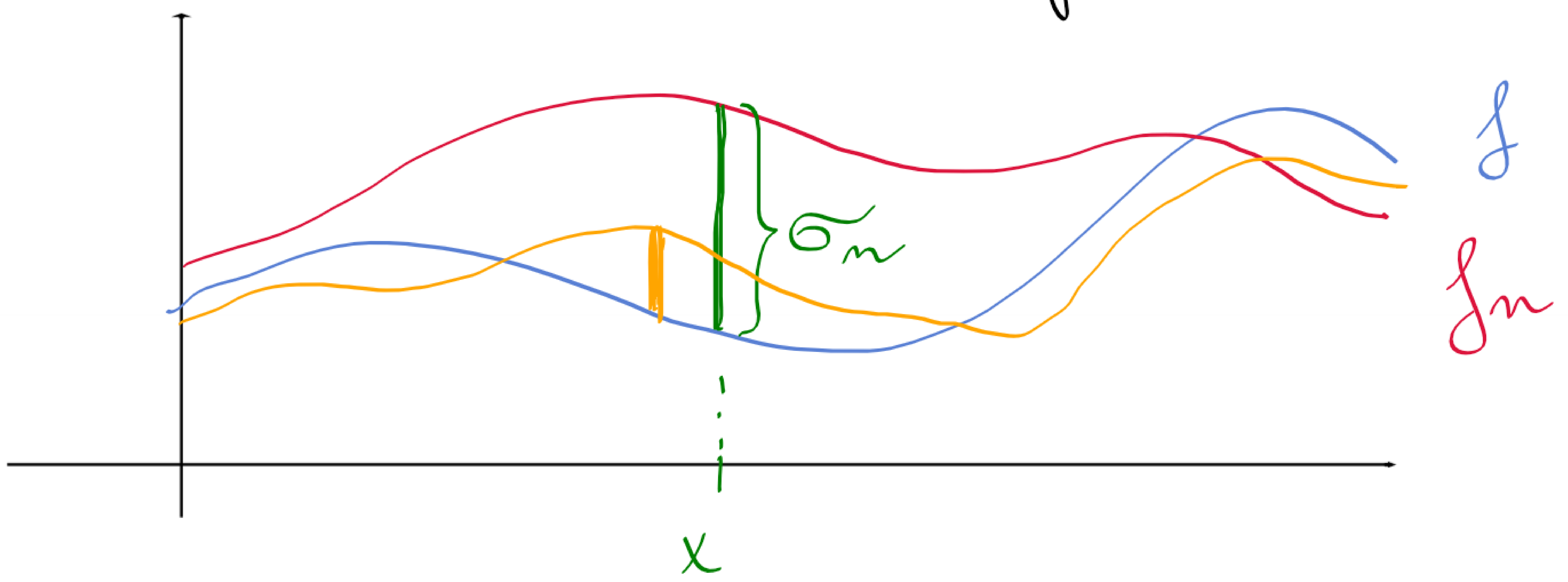
Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $M \iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Lemma 73: $(0\ \sigma_n)$ Buďte f_n, f $(n \in \mathbb{N})$ def. aspoň na $M \neq \emptyset$.

Označme $\sigma_n := \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$.

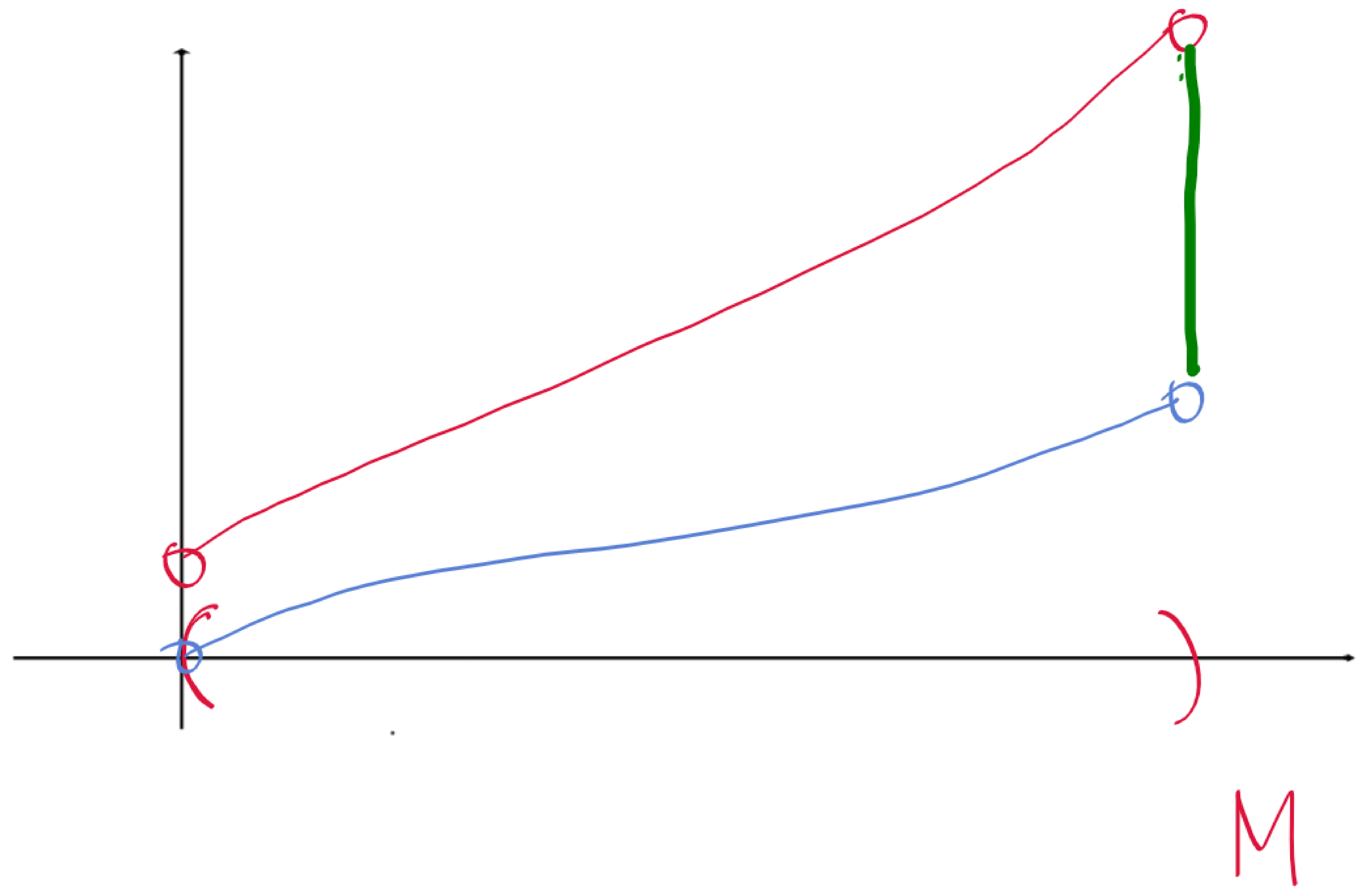
Pak $f_n \rightrightarrows f$ na M $\iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Důkaz: Snadné cvičení na definice. ☒



Zde je největší vzdálenost hodnot f_n a f.

(na tomto obr. sup = max)



Zde pouze sup.

Příklad: $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in (0,1)$

Bodová limita: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right) = 0 - 0 = 0$$

Stejnoměrnou k. pomocí σ_n:

$$\sigma_n = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \sup_{x\in(0,1)} |x^n - x^{n+1} - 0| = \sup_{x\in(0,1)} |x^n - x^{n+1}|$$

Nyní je pevné n. Hledáme σ_n.

$$(x^n - x^{n+1})' = n \cdot x^{n-1} - (n+1)x^n =$$

$$= x^{n-1}(n - (n+1)x) = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \vee \quad (n+1)x = n$$

$$\iff x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{n}{n+1} \quad \ldots \text{ bod max.}$$

Vyhodnotíme v bodě:

$$\sigma_n = \left| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \right| =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\in(0,1),\ \text{tj. omezená}}}^{\to \frac{1}{e}} \cdot \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{\to 0} = 0$$

(„nulová · omezená")

Závěr: Podle L73 tedy $f_n \rightrightarrows 0$.

Příklad: $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ na $\mathbb{R}$.

1. KROK: Spočtěte pro pevné x:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Tj. máte $f(x)$

2. KROK Pro pevné n spočtěte

$$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$$

3. KROK Spočtěte $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ a napište závěr.

$$\lim f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2+0} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

2) $$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| \underbrace{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x|}_{g_n(x) > 0,\ x\in\mathbb{R}} \Big|$$

$$g_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x| =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{0^2+\frac{1}{n^2}}+|0|} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

Tedy $\sigma_n \leq \frac{1}{n} \implies \lim \sigma_n = 0$

3) Podle L73 $f_n \rightrightarrows 0$.

2) Standardně

$$g_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x| \quad \text{je sudá}$$

$\Rightarrow$ stačí na $[0,\infty)$. $\quad = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - x$

$$g_n'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} - 1 = \underbrace{\frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}_{>x}}}_{<1} - 1 < 0$$

Funkce je na $[0,\infty)$ klesající, kladná.

$\Rightarrow$ max se nabývá v bodě 0.

$$\sigma_n = g_n(0) = \sqrt{0^2+\frac{1}{n^2}} - |0| = \frac{1}{n}$$

Tedy $\lim \sigma_n = \lim \frac{1}{n} = 0$.

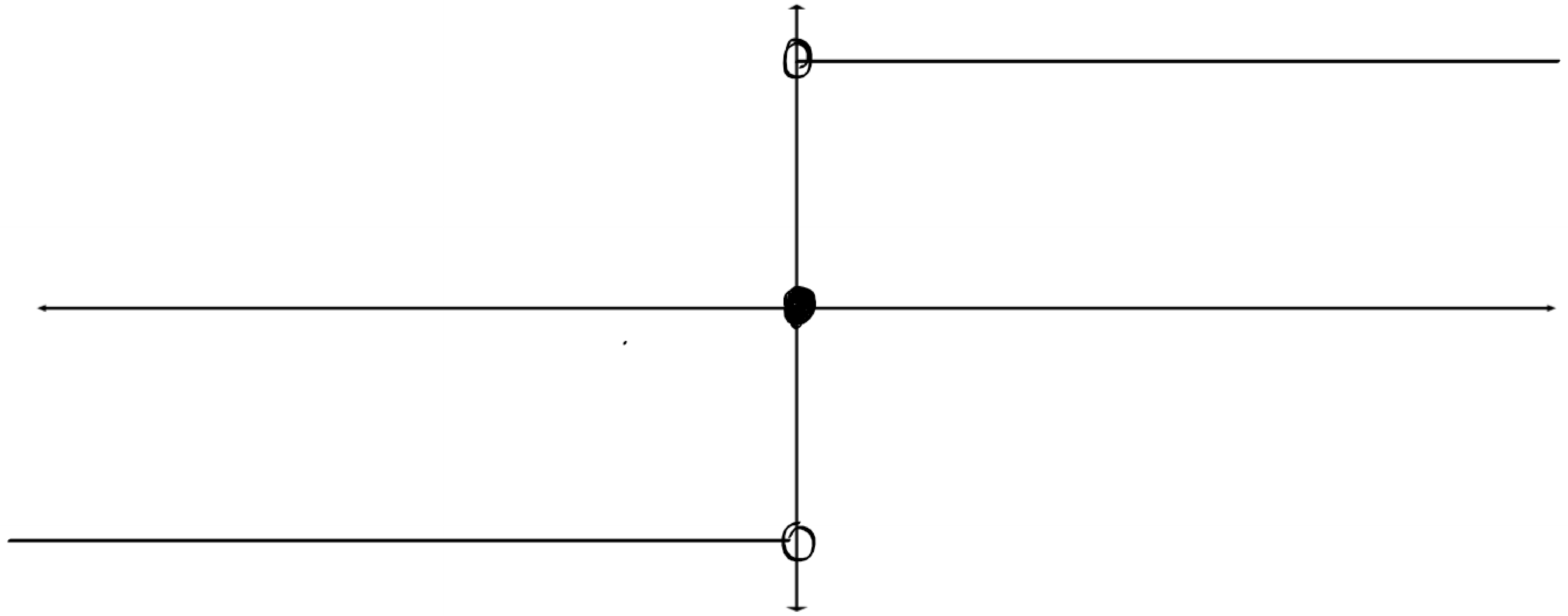
Příklad: $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $x \in \mathbb{R}$

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou K.

1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} x$

2) $\sigma_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$

3) $\lim \sigma_n = ?$



$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ ... lichá

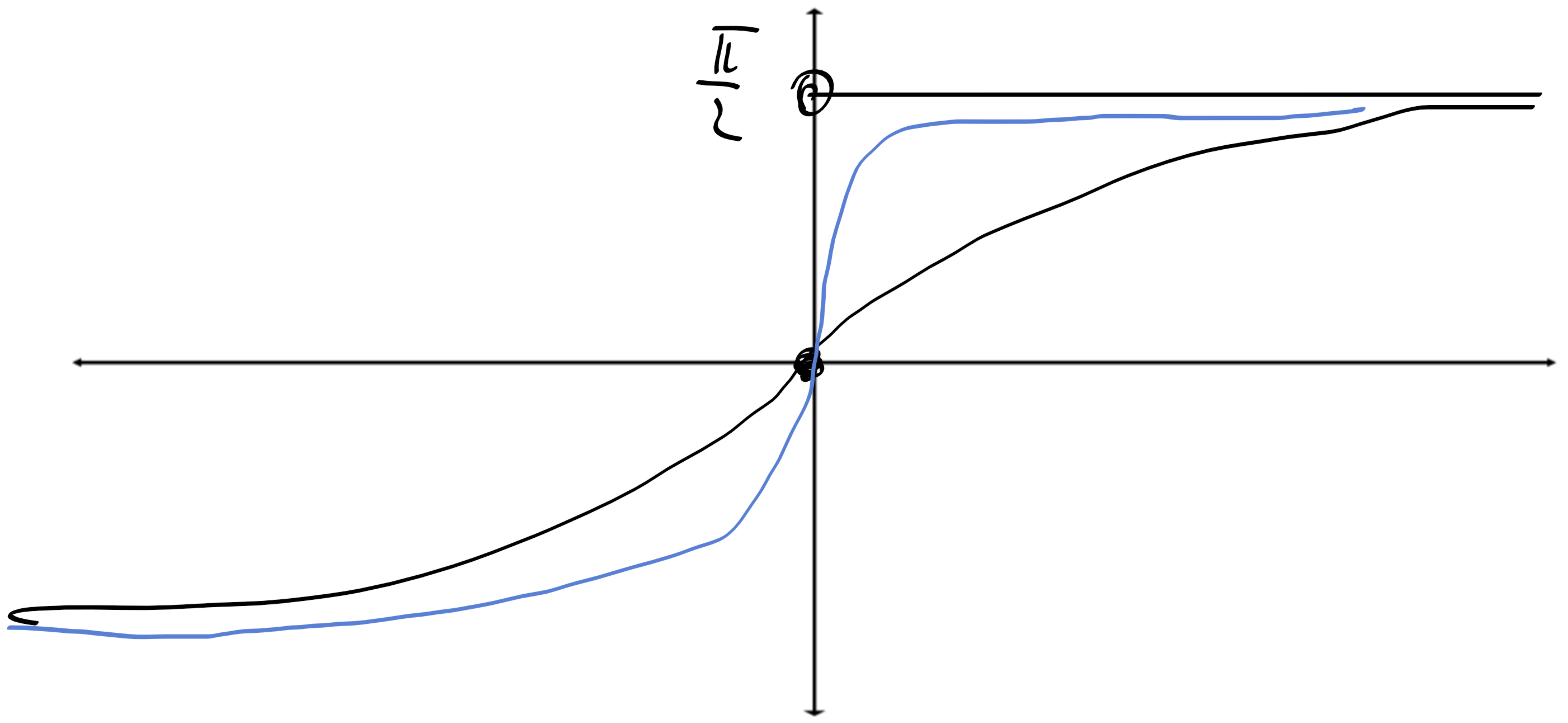
$f(x) = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn} x$ ... lichá

$$\sigma_n = \sup_{\mathbb{R}} \underbrace{\left|\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\right|}_{\text{sudá}} =$$

$$= \sup_{(0,\infty)} \underbrace{\left|\underbrace{\underbrace{\operatorname{arctg}(nx)}_{\text{roste k } \frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}}_{\text{roste k } 0}\right|}_{\text{klesá k } 0} =$$

$$= \left|\operatorname{arctg}(n\cdot 0) - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}.$$

To ovšem pro všechna $n \in \mathbb{N}$



$\sigma_n = \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$,

tj. $\lim \sigma_n \neq 0$, a tedy

$f_n \not\rightrightarrows f$.

Platí: Pokud $f_n \rightrightarrows f$, pak i $f_n \to f$. $\Bigg\}$ (*)

Ale bodová limita je jednoznačně určená!
Limita každé posloupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (pokud vůbec $\exists$) je jen jedna.

Závěr je: Jediný kandidát na stejnoměrnou limitu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je její limita bodová (která je určena jedn.).

Tj. $\lim f_n(x) =: f(x)$ je jednoznačná pro každé x.

Tím pádem (*) i stejnoměrná limita (ex.-li) je jen jedna, a to ta bodová. Kdyby totiž $\exists f \neq g$, že $f_n \rightrightarrows f \wedge f_n \rightrightarrows g$, pak podle (*) by bylo $f_n \to f \wedge f_n \to g$, což není možné.